BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОТОРОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р.М.БАБАЕВ
Бакинский Государственный Университет
babaevrauf@front.ru

В работе исследуются свойства некоторого интегрального оператора и условие разрешимости соответствующего интегрального уравнения I рода, а также строится обратный оператор данного интегрального оператора.

Пусть $G_{\alpha,\beta}(t)$ прообраз Фурье регулярной обобщенной функции из Φ'

$$K_{\alpha,\beta}(r)=\frac{1}{|r|^{\alpha}\left(1+|r|^{2}\right)^{\beta/2}},\qquad r\in R^{n}\setminus\{0\},$$

где $0<\alpha<n,\ \ \beta>0$ (см. [1]).

Рассмотрим интегральный оператор

$$\left(K_{\alpha,\beta}\,\varphi\right)(t)=\int_{R^{n}}G_{\alpha,\beta}(t-r)\varphi(r)dr,\qquad t\in R^{n},\qquad \varphi\in L_{p}(R^{n}).$$

Известно ([1]), что при $\varphi\in\Phi$

$$\int_{R^{n}}G_{\alpha,\beta}(t-r)\varphi(r)dr=\int_{R^{n}}k_{\alpha}(t-r)dr\int_{R^{n}}G_{\beta}(r-s)\varphi(s)ds,\qquad t\in R^{n},$$

где k_{α} – риссово, а G_{β} – бесселово ядро ([2]).

Введем обозначения :

$$(\widetilde{K}_{\alpha,\ \beta}\,\varphi)(t)=\int_{R^{n}}k_{\alpha}(t-r)dr\int_{R^{n}}G_{\beta}(r-s)\varphi(s)ds,$$

$$(I^{\alpha}\,\psi)(t)=\int_{R^{n}}k_{\alpha}(t-r)\,\psi(r)dr,$$

$$(B^{\beta}\,\varphi)(t)=\int_{R^{n}}G_{\beta}(t-r)\varphi(r)dr,\ \ t\in R^{n}.$$

Так как операторы $I^{\alpha}:L_{p}(R^{n})\to L_{p_{\alpha}}(R^{n}),\ \ 1<p<\dfrac{n}{\alpha},\ \ p_{\alpha}=\dfrac{np}{n-p\alpha}$ и $B^{\beta}:L_{p}(R^{n})\to L_{p}(R^{n})$ ограничены , то $\widetilde{K}_{\alpha,\beta}:L_{p}(R^{n})\to L_{p_{\alpha}}(R^{n})$ и

$\left\| \widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi \right\|_{p_\alpha} \le C_{\alpha,\,\beta}\|\varphi\|_p$, где $C_{\alpha,\,\beta}$ – неотрицательная постоянная, не зависящая от функций φ.

Если мы докажем, что оператор $K_{\alpha,\,\beta}$ действует из $L_p(R^n)$ в $L_{p_\alpha}(R^n)$ ограниченно, то из плотности Φ в $L_p(R^n)$ будет следовать, что при $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$ справедливо равенство

$$\widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi = K_{\alpha,\,\beta}\varphi .$$

Теорема 1. Оператор $K_{\alpha,\,\beta}$ действует из $L_p(R^n)$ в $L_{p_\alpha}(R^n)$ ограниченно.

Доказательство. Оценим интеграл

$$G_{\alpha,\,\beta}(t) = \int\limits_{R^n} k_\alpha(t-r)G_\beta(r)dr, \quad t \in R^n .$$

Для этой цели оценим интеграл

$$\widetilde{G}_{\alpha,\,\beta}(t) = \int\limits_{R^n} \frac{G_\beta(r)dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, \quad t \in R^n .$$

Как известно ([4]), G_β – прообраз обобщенной функции $\dfrac{1}{\left(1+|r|^2\right)^{\beta/2}}$ в смысле Φ' и принадлежит $L_1(R^n)$. Кроме того, функция $G_\beta(r)$ непрерывно дифференцируема вне начала координат и верна асимптотика:

$$G_\beta(r) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left((n-\beta)/2\right)}{2^\beta \pi^{n/2}\Gamma\left(\beta/2\right)}|r|^{\beta-n}, & 0<\beta<n, \\ \dfrac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)}\ln\dfrac{1}{|r|}, & \beta = n, \\ \dfrac{\Gamma\left((\beta-n)/2\right)}{2^n \pi^{n/2}\Gamma\left(\beta/2\right)}, & \beta > n \end{cases} \qquad \text{при } |r| \to 0$$

и

$$G_\beta(r) \sim \frac{|r|^{(\beta-n-1)/2}e^{-|r|}}{2^{(\beta+n-1)/2}\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\beta/2\right)}, \quad \text{при } |r| \to \infty .$$

Далее имеем

$$\widetilde{G}_{\alpha,\,\beta}(t) = I_1(t) + I_2(t), \;\; t \in R^n ,$$

где

$$I_1(t)=\int\limits_{|r|\le 1}\frac{G_\beta(r)dr}{|r-t|^{n-\alpha}},\qquad I_2(t)=\int\limits_{|r|>1}\frac{G_\beta(r)dr}{|r-t|^{n-\alpha}},\qquad t\in R^n.$$

Оценим $I_1(t)$ и $I_2(t)$, $t\in R^n$.

При $|t|<2$

$$I_1(t)\le C_1\begin{cases}\int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{dr}{|r|^{n-\beta}\ |r-t|^{n-\alpha}}, & 0<\beta<n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{\ln\frac{1}{|r|}\,dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, & \beta=n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, & \beta>n,\end{cases}\le C_2\begin{cases}1, & \alpha+\beta>n,\quad 0<\beta<n,\\ \ln\dfrac{1}{|t|}, & \alpha+\beta=n,\quad 0<\beta<n,\\ \dfrac{1}{|t|^{n-\alpha-\beta}}, & \alpha+\beta<n,\quad 0<\beta<n,\\ \ln\dfrac{1}{|t|}, & \beta=n,\\ 1, & \beta>n,\end{cases}$$

а при $|t|\ge 2$

$$|I_1(t)|\le C_3\begin{cases}\int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{dr}{|r|^{n-\beta}\ |r-t|^{n-\alpha}}, & \beta<n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{\ln\frac{1}{|r|}\,dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, & \beta=n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, & \beta>n,\end{cases}\le\ \frac{C_4}{|t|^{n-\alpha}}\begin{cases}\int\limits_{|r|\le 1}\dfrac{dr}{|r|^{n-\beta}}, & \beta<n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}\ln\dfrac{1}{|r|}\,dr, & \beta=n,\\ \int\limits_{|r|\le 1}dr, & \beta>n,\end{cases}\le\ \frac{C_{\alpha,\ \beta}}{|t|^{n-\alpha}},$$

где все постоянные не зависят от t.

А теперь оценим $I_2(t)$, $t\in R^n$. Имеем

$$|I_2(t)|=C_1\int\limits_{|r|>1}\frac{|r|^{(\beta-n-1)/2}e^{-|r|}dr}{|r-t|^{n-\alpha}}\le C_2\int\limits_{|r|>1}\frac{e^{-|r|}dr}{(1+|r|)^{\frac{n+1-\beta}{2}}|r-t|^{n-\alpha}}=$$

$$=C_3\left[\int\limits_{|r-t|\le\frac{|t|}{2}}\frac{e^{-|r|}dr}{(1+|r|)^{\frac{n+1-\beta}{2}}|r-t|^{n-\alpha}}+\int\limits_{|r-t|>\frac{|t|}{2}}\frac{e^{-|r|}dr}{(1+|r|)^{\frac{n+1-\beta}{2}}|r-t|^{n-\alpha}}\right]\le$$

$$\le C_4\left[e^{-\frac{|t|}{4}}\int\limits_{|r-t|\le\frac{|t|}{2}}\frac{dr}{|r-t|^{n-\alpha}}+\frac{1}{|t|^{n-\alpha}}\int\limits_{|r-t|>\frac{|t|}{2}}\frac{e^{-|r|}dr}{(1+|r|)^{\frac{n+1-\beta}{2}}}\right]\le\frac{C_5}{|t|^{n-\alpha}},$$

где постоянные не зависят от t.

Учитывая оценки для $I_1(t)$ и $I_2(t)$, $t\in R^n$, получаем:

$$\left|\widetilde{G}_{\alpha,\beta}(t)\right| \le \frac{\widetilde{C}_{\alpha,\beta}}{|t|^{n-\alpha}}, \quad t \in R^n \setminus \{0\}$$

или

$$\left|G_{\alpha,\beta}(t)\right| \le \frac{C_{\alpha,\beta}}{|t|^{n-\alpha}}, \quad t \in R^n \setminus \{0\},$$

где $C_{\alpha,\beta} > 0$ не зависит от t.

Таким образом, имеем:

$$\left|\left(K_{\alpha,\beta}\varphi\right)(t)\right| \le C_{\alpha,\beta} \int_{R^n} \frac{|\varphi(r)|dr}{|r-t|^{n-\alpha}}, \; t \in R^n,$$

откуда , по теореме Соболева об ограниченности потенциала Рисса , следует:

$$K_{\alpha,\beta} : L_p(R^n) \to L_{p_\alpha}(R^n), \; 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \; p_\alpha = \frac{np}{n - \alpha\, p},$$

где

$$\left\|K_{\alpha,\beta}\varphi\right\|_{L_{p_\alpha}(R^n)} \le C'_{\alpha,\beta} \|\varphi\|_{L_p(R^n)},$$

$C'_{\alpha,\beta} > 0$ не зависит от φ. Теорема доказана.

Следствие. Справедливо равенство:

$$K_{\alpha,\beta}\varphi = \widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi, \quad \varphi \in L_p(R^n), \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}. \tag{1}$$

Рассмотрим усеченный гиперсингулярный интеграл

$$\left(D_\varepsilon^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{d_{\ell,\alpha}} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\left(\Delta_t^\ell f\right)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \quad x \in R^n, \; \varepsilon > 0,$$

где $\left(\Delta_t^\ell f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k C_\ell^k f(x - kt), \; x, t \in R^n, \; d_{\ell,\alpha}$ – определенное постоянное число (см.[4]), $\ell > \alpha$.

Скажем, что гиперсингулярный интеграл сходится условно по норме пространства $L_p(R^n)$, если существует предел

$$D^\alpha f = \lim_{\substack{(L_p) \\ \varepsilon \to 0}} D_\varepsilon^\alpha f,$$

т.е. для некоторого $g \in L_p(R^n)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\|D_\varepsilon^\alpha f - g\right\|_{L_p(R^n)} = 0 \;\text{ и }\; D^\alpha f \overset{def}{=} g.$$

Пусть

$$L_{p,r}^\alpha(R^n) = \left\{f : f \in L_r(R^n), \, D^\alpha f \in L_p(R^n)\right\}.$$

Известно ([4])

$$B^\alpha(L_p(R^n)) = L_p^\alpha(R^n) \overset{def}{=} L_{p,p}^\alpha(R^n), \qquad I^\alpha(L_p(R^n)) = L_{p,p_\alpha}^\alpha(R^n).$$

Из (1) следует:

$$K_{\alpha,\,\beta}(L_p(R^n)) = \left\{ f : f \in L_{p_\alpha}(R^n),\ D^\alpha f \in L_p^\beta(R^n) \right\} =$$

$$= \left\{ f : f \in L_{p_\alpha}(R^n),\ D^\alpha f \in L_p(R^n),\ D^\beta D^\alpha f \in L_p(R^n) \right\} \overset{def}{=} \boldsymbol{L}_{p,\,p_\alpha}^{\alpha,\,\beta}(R^n).$$

Из вышеуказанного следуют теоремы :

Теорема 2. Для $\varphi \in L_p(R^n), 1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$ справедливо $T^\beta D^\alpha K_{\alpha,\,\beta}\varphi = \varphi$, где D^α, T^β - левые обратные, соответственно, потенциалов Рисса и Бесселя ([2]).

Теорема 3. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{p,\,p_\alpha}^{\alpha,\,\beta}(R^n)$. Тогда уравнение $K_{\alpha,\,\beta}\varphi = f$ разрешимо в $L_p(R^n)$ и $\varphi = T^\beta D^\alpha f$.

Пусть $c(x,t), x,t \in R^n$ ограниченная измеримая функция, $c(t,t) \neq 0, t \in R^n$. Рассмотрим уравнение

$$\int_{R^n} G_{\alpha,\,\beta}(x-t)c(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{p,\,p_\alpha}^{\alpha,\,\beta}(R^n)$ и $A_{\alpha,\beta} = T^\beta D^\alpha$ -левый обратный к оператору $K_{\alpha,\,\beta}$. Имеем

$$\int_{R^n} G_{\alpha,\,\beta}(x-t)[c(x,t) - c(t,t)\ ]\varphi(t)dt + \int_{R^n} G_{\alpha,\,\beta}(x-t)c(t,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

$$c(x,x)\varphi(x) + \left(A_{\alpha,\beta}\widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi\right)(x) = \left(A_{\alpha,\beta} f\right)(x)$$

или

$$\varphi(x) + \frac{1}{c(x,x)}\left(A_{\alpha,\beta}\widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi\right)(x) = \frac{1}{c(x,x)}\left(A_{\alpha,\beta} f\right)(x), \quad x \in R^n,$$

где

$$\left(\widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi\right)(x) = \int_{R^n} G_{\alpha,\,\beta}(x-t)[c(x,t) - c(t,t)\ ]\varphi(t)dt, x \in R^n \ .$$

Пусть

$$(F_{\alpha,\beta}\varphi)(x) = \frac{1}{c(x,x)}\left(A_{\alpha,\beta}\widetilde{K}_{\alpha,\,\beta}\varphi\right)(x), \varphi \in L_p\left(R^n\right)\ \left(1 < p < \frac{n}{\alpha}\right), x \in R^n.$$

Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(I + F_{\alpha,\beta}\right)\varphi = g\,, \tag{3}$$

где

$$g(x) = \frac{1}{c(x,x)}\left(A_{\alpha,\beta} f\right)(x), x \in R^n.$$

Теорема 4. Пусть

$$F_{\alpha,\beta} : L_p(R^n) \to L_p(R^n), \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}$$

-компактный оператор. Тогда уравнение (2) регуляризуется в Фредгольмого уравнение (3) II рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаев Р.М. О решении некоторого интегрального уравнения I рода в пространстве $L_p(R^n)$ // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат. наук, 2004, №1, с.24-29.
2. Бабаев Р.М. Об одном обобщении потенциала Рисса // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат. наук, 2007, №2, с.22-28.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространство основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958, 308 с.
4. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростовский ун-т, 1984, 205 с.

MÜƏYYƏN İNTEQRAL TƏNLİYİN REQULYARİZASİYASI HAQQINDA

R.M.BABAYEV

XÜLASƏ

İşdə müəyyən inteqral operatorun xassələri və uyğun I növ inteqral tənliyin həll edilməsi şərtləri tədqiq edilir, həmçinin verilmiş inteqral operatorun tərsi qurulur.

ON THE REGULARIZATION OF SOME INTEGRAL EQUATION

R.M.BABAYEV

SUMMARY

The properties of some integral operator and solvability conditions for the corresponding integral equation of the I kind are investigated in the paper. The inverse operator for the given integral operator is constructed as well.